

LUCRAREA 4

PROGRAMAREA LINIARĂ ÎN REZOLVAREA PROBLEMELOR DIN ENERGETICĂ

4.1. Aspecte generale

Programarea liniară (PL) este cea mai dezvoltată metodă de rezolvare a problemelor de optimizare. Teoria programării liniare conduce la posibilitatea rezolvării eficiente, cu ajutorul calculatorului, a majorității problemelor de programare matematică cu model liniar, ce rezidă din probleme tehnice sau economice.

Deși s-ar părea că problemele de PL pot fi rezolvate prin metodele clasice ale analizei matematice, anulând derivatele parțiale, lucrurile nu stau chiar așa. Funcția obiectiv fiind liniară, derivatele parțiale sunt constante și, în plus, soluția optimă se găsește pe frontiera soluțiilor admisibile, astfel încât metodele clasice nu dau rezultate.

4.2. Forma matematică a problemelor de programare liniară

O problemă de programare liniară constă în extremizarea unei expresii liniare denumită funcție obiectiv, în prezența unor restricții exprimate prin ecuații sau inecuații liniare.

Forma generală a unei probleme de programare liniară este:

$$\max(\min)F(X) = \max(\min)\sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (4.1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, \dots, m \quad (4.2)$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \quad (4.3)$$

Funcția obiectiv (4.1) împreună cu restricțiile (4.2) – (4.3) alcătuiesc modelul matematic de optimizare.

Exemplu numeric

$\max(\min) 3x_1 + 5x_2$ $x_1 \leq 3$ $2x_1 + 3x_2 \leq 10$ $x_1 + x_2 \leq 4$ $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\}$	<p>Funcția obiectiv liniară (FO)</p> <p>Sistem de restricții liniare (RE)</p> <p>Condiția de non-negativitate (CO)</p>
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Dacă o problemă de programare liniară este adusă la o formă în care toate restricțiile sunt exprimate prin egalități și toate variabilele sunt supuse condiției de nenegativitate putem spune că respectiva problemă are formă standard.

Forma standard a unei probleme de programare liniară este următoarea:

$$\max(\min) F(X) = \max(\min)(c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n) \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.6)$$

Exemplu numeric

$\max(\min) 3x_1 + 5x_2 + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + 0 \cdot s_3$ $x_1 + s_1 = 3$ $2x_1 + 3x_2 + s_2 = 10$ $x_1 + x_2 + s_3 = 4$ $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad s_1 \geq 0, \quad s_2 \geq 0, \quad s_3 \geq 0$

sau, sub **formă matricială**:

$$\max(\min)F(X) = \max(\min)CX \quad (4.7)$$

$$AX = b \quad (4.8)$$

$$X \geq 0 \quad (4.9)$$

unde:

A – matricea coeficienților sistemului de restricții;

b – vectorul coloană al termenilor liberi;

X – vectorul coloană al celor n necunoscute;

C – vectorul coeficienților funcției obiectiv $F(X)$.

Exemplu numeric

$$\begin{array}{c} \max(\min) \underbrace{[3 \ 5 \ 0 \ 0 \ 0]}_{\mathbf{C}} \underbrace{[x_1 \ x_2 \ s_1 \ s_2 \ s_3]}_{\mathbf{X}} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \underbrace{[x_1 \ x_2 \ s_1 \ s_2 \ s_3]}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\left[\begin{array}{c} 3 \\ 10 \\ 4 \end{array} \right]}_{\mathbf{b}} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\mathbf{A}} \hspace{1.5cm} \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\mathbf{X}} \hspace{1.5cm} \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\mathbf{b}} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, s_3 \geq 0 \end{array}$$

Prin partiționarea matricei A după coloanele sale, a_1, a_2, \dots, a_n , se poate obține **forma vectorială**:

$$\max F(X) = \max CX \quad (4.10)$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \quad (4.11)$$

$$X \geq 0 \quad (4.12)$$

Exemplu numeric

$$\max(\min) \underbrace{[3 \ 5 \ 0 \ 0 \ 0]}_{\mathbf{C}} \underbrace{[x_1 \ x_2 \ s_1 \ s_2 \ s_3]}_{\mathbf{X}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_1} x_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_2} x_2 + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_3} s_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_4} s_2 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_5} s_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, s_3 \geq 0$$

O restricție corespunzătoare unei probleme de programare liniară spunem că este **concordantă** dacă este o inegalitate de tipul " \geq ", când funcția obiectiv trebuie minimizată, respectiv este o egalitate de tipul " \leq ", când se cere maximizarea funcției obiectiv.

O problemă de programare liniară are o **formă canonică** dacă toate restricțiile sale sunt concordante și toate variabilele sunt supuse condiției de nonnegativitate:

$$\begin{aligned} \max F(X) &= \max CX \\ AX &\leq b \\ X &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.13}$$

sau

$$\begin{aligned} \min F(X) &= \min CX \\ AX &\geq b \\ X &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Formele prezentate mai sus sunt echivalente pentru că orice problemă de programare liniară poate fi adusă la oricare din formele: standard, vectorială sau canonică, folosind următoarele transformări echivalente.

Exemplu numeric

$$\begin{array}{c}
 \max [3 \quad 5][x_1 \quad x_2] \\
 \underbrace{\quad} \quad \underbrace{\quad} \\
 \mathbf{C} \quad \mathbf{X} \\
 \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{array} \right] [x_1 \quad x_2] \leq \left[\begin{array}{c} 3 \\ 10 \\ 4 \end{array} \right] \\
 \underbrace{\quad} \quad \underbrace{\quad} \quad \underbrace{\quad} \\
 \mathbf{A} \quad \mathbf{X} \quad \mathbf{b} \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \min [-3 \quad -5][x_1 \quad x_2] \\
 \underbrace{\quad} \quad \underbrace{\quad} \\
 \mathbf{C} \quad \mathbf{X} \\
 \left[\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ -2 & -3 \\ -1 & -1 \end{array} \right] [x_1 \quad x_2] \geq \left[\begin{array}{c} -3 \\ -10 \\ -4 \end{array} \right] \\
 \underbrace{\quad} \quad \underbrace{\quad} \quad \underbrace{\quad} \\
 \mathbf{A} \quad \mathbf{X} \quad \mathbf{b} \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{array}$$

4.3. Rezolvarea problemelor PL cu funcții MatLab

In general o problemă de programare liniară poate avea următoarea formă:

$$\min F(X) = \min CX \tag{4.15}$$

în prezența restricțiilor:

$$\begin{array}{l}
 A \cdot X \leq b \\
 A_{eg} \cdot X = b_{eg} \\
 X_{\min} \leq X \leq X_{\max}
 \end{array} \tag{4.16}$$

Sintaxa

$$X = \mathbf{linprog}(F, A, b, A_{eg}, b_{eg}) \tag{a)}$$

$$X = \mathbf{linprog}(F, A, b, A_{eg}, b_{eg}, X_{\min}, X_{\max}) \tag{b)}$$

$$X = \mathbf{linprog}(F, A, b, A_{eg}, b_{eg}, X_{\min}, X_{\max}, X0) \tag{c)}$$

$$[X, F, \text{convergența}, \text{informații}] = \mathbf{linprog}(C, A, b, A_{eg}, b_{eg}, X_{\min}, X_{\max}, X0) \tag{d)}$$

unde:

(a) rezolvă o problemă de programare liniară care are forma:

$$\min F(X) \quad a. i. \quad A \cdot X \leq b$$

- (b) rezolvă o problemă de programare liniară ca cea de mai sus, care satisface în plus și restricții de egalitate: $A_{eg} \cdot X = b_{eg}$. Dacă restricțiile de inegalitate nu există atunci: $A = []$, $b = []$.
- (c) definește o mulțime în planul variabilelor, corespunzătoare unor frontiere inferioare și superioare, astfel încât soluția problemei se situează în intervalul $[X_{min}, X_{max}]$. Dacă nu există restricții de egalitate atunci $A_{eg} = []$, $b_{eg} = []$.
- (d) alege o soluție inițială în punctul $X0$.

X – soluția problemei;

F – returnează valorile funcțiilor obiectiv corespunzătoare soluției găsite;

convergența – ne dă informații cu privire la convergența procesului. Dacă variabila are o valoare mai mare ca 0, funcția converge la soluția X , dacă are valoarea egală cu 0, numărul maxim de evaluări ale funcției sau numărul maxim de iterații a fost depășit, iar dacă are valoarea mai mică decât 0, procesul de optimizare este divergent;

informații – ne furnizează date despre procesul de optimizare (numărul de iterații, numărul de evaluări ale funcției, algoritmul folosit).

Exemplu numeric

Se cere să se găsească soluția modelului matematic prezentat mai sus, folosind funcția Matlab **linprog**.

Utilizând secvența Matlab:

```
>> C=[-3 -5];
>> A=[1 0;2 3;1 1];
>> b=[3;10;4];
>> Xmin=zeros(2,1);
>> [X,F]=linprog(C, A, b,[],[], Xmin)
```

se obțin următoarele rezultate:

```
Optimization terminated.
x =
    0
```

3.3333 F = -16.6667

4.4. Desfășurarea lucrării

1. Se studiază textul lucrării.
2. Să se scrie toate formele matematice ale următoarelor probleme de programare liniară:

FO: $\min F(X) = 2X_1 + X_2 + X_3$

RE: $3X_1 + 5X_2 + 2X_3 \geq 16$
 $4X_1 - 2X_2 + X_3 \geq 3$

FO: $\min F(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2$
 $x_1 \geq 1 ; x_1 \leq 5$

RE: $x_2 \geq 2$
 $-x_1 + x_2 \leq 3$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

FO: $\max F(x_1, x_2) = 4x_1 + 3x_2$
 $x_1 + x_2 \geq 2$

RE: $-\frac{1}{4}x_1 + x_2 \leq 2$
 $-2x_2 + x_2 \geq -5$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

3. Să determine soluția optimă pentru probelele de programare liniară prezentate la punctul 2 folosind funcția Matlab **linprog**.